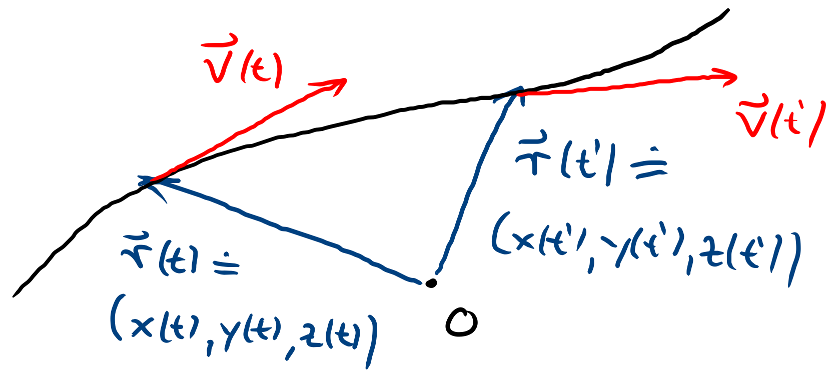
II. Kinematik

II.1 Raumkurven

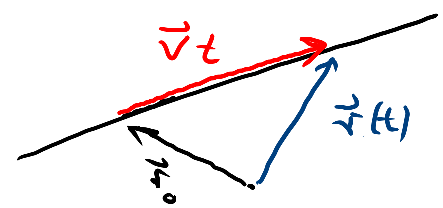
Vektorfunktion

$$\vec{f}(t) \doteq \left(f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t) \right)$$



Beispiele:

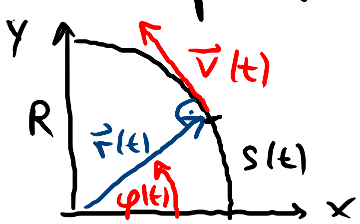
- geradlinige, konstante Geschwindigkeit $\vec{v}$ zur Zeit $t=0$ sei $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ $\Big\} \Rightarrow$



$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t \doteq \left(x_0 + v_1 t,\ y_0 + v_2 t,\ z_0 + v_3 t \right) \qquad (2.1)$$

Parameterdarstellung einer Geraden

- Kreisbewegung in xy-Ebene um Ursprung, im positiven Drehsinn, mit konstantem $|\vec{v}| = v$



Start: $t = 0$, $\varphi = 0$

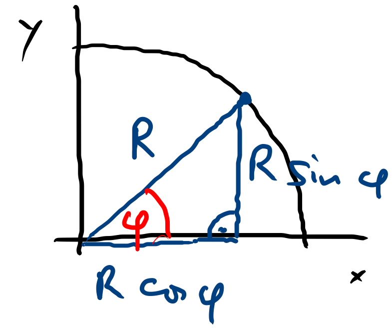
Bogenlänge $s(t) = v \cdot t$

Winkel $\varphi(t) = s(t)/R = v \cdot t/R =: \omega t$

Winkelgeschw. $\omega = v/R$

$\vec{r}(t) \doteq R\,(\cos\omega t,\ \sin\omega t,\ 0)$ (2.2)

Periode $T = 2\pi/\omega$ weil $\vec{r}(t+T) = \vec{r}(t)$



Geschwindigkeit $\vec{v} \perp \vec{r}$ $\leadsto$ $\vec{v} \parallel \vec{e}_3 \times \vec{r}$

$v = R\omega$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cos\\ \sin\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\\ \cos\\ 0\end{pmatrix} = \vec{e}_v \leadsto \vec{v} = v\,\vec{e}_v = R\omega\,\vec{e}_v$$

$\vec{v}(t) \doteq R\omega\,(-\sin\omega t,\ \cos\omega t,\ 0)$ (2.3)

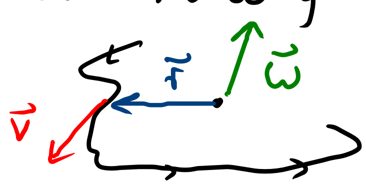
alternativ: $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \doteq (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$

allgemein: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ (2.4)

- Schraubenlinie (in z-Richtung)

$\vec{r}(t) \doteq (R\cos\omega t,\ R\sin\omega t,\ v_3 t)$ (2.5)

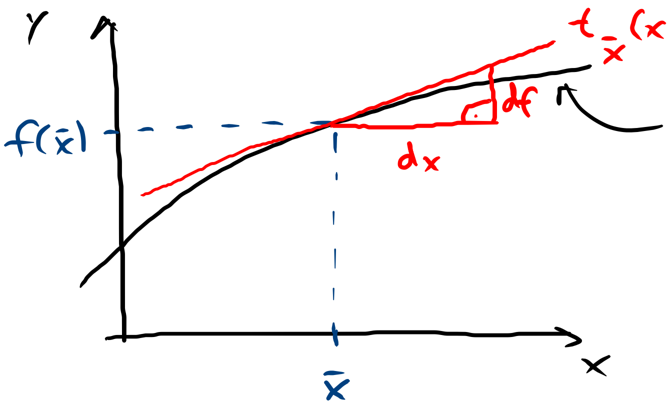
Bemerkung zur Kreisbewegung: i.a. ist ω ein Vektor



Geschw.: $\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$ (2.6)

Winkelgeschw. $\vec{\omega}(t) = \omega(t) \cdot \vec{e}_{Achse}(t)$

II.2 Differenzieren



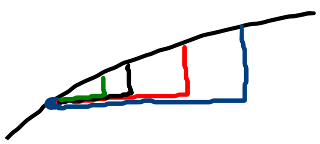
Graph von $y = f(x)$

Ableitung von $f(x)$ bei $\bar{x}$

= Anstieg des Graphen bei $x = \bar{x}$

= Steigung der Tangente bei $\bar{x}$

Tangente: $t_{\bar{x}}(x) = f(\bar{x}) + a \cdot (x - \bar{x})$



Notation: $a = a(\bar{x}) =: f'(\bar{x})$ ← Ableitung

$$f'(\bar{x}) = (\partial_x f)(\bar{x}) = \frac{df}{dx}(\bar{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\bar{x}+\varepsilon) - f(\bar{x})}{\varepsilon} \qquad (2.7)$$

Grenzwert — Differenzialquotient

dx, df heißen „Differenziale"

andersherum:

$$\left.\begin{aligned} f(\bar{x}+\varepsilon) &= f(\bar{x}) + \varepsilon \cdot f'(\bar{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ df &= f'(x) \cdot dx \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$: Terme, die wie ε^2 gegen Null gehen für $\varepsilon \to 0$

Differenzieren = Bilden der Ableitung für jedes $\bar{x}$

Ergebnis: Ableitungsfunktion $f'(\bar{x})$ von $\bar{x}$

Ableiten ist eine Operation $f \mapsto f' = \frac{df}{dx} = \partial_x f$

↳ „$\frac{d}{dx}$" oder „∂_x"

Funktionswerte sind $f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = (\partial_x f)(x)$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ $(x>0)$

$$\partial_x \sqrt{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})}{\varepsilon(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{x+\varepsilon}^2 - \sqrt{x}^2}{\varepsilon(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(\cancel{x}+\varepsilon) - \cancel{x}}{\varepsilon(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

genauso:

$$\partial_x (x^n) = n\, x^{n-1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\partial_x \cos x = -\sin x$$

$$\partial_x \sin x = \cos x$$

Leibniz-Regel oder Produktregel

Produktfunktion $h = f \cdot g \Leftrightarrow h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\partial_x (f \cdot g)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[f(x+\varepsilon) g(x+\varepsilon) - f(x) g(x) \right]$$

$$\overset{(2.8)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\{ f(x) + \varepsilon f'(x) + \cancel{O(\varepsilon^2)} \} \{ g(x) + \varepsilon g'(x) + \cancel{O(\varepsilon^2)} \} - f(x) g(x) \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\cancel{f(x) g(x)} + \varepsilon f'(x) g(x) + \varepsilon f(x) g'(x) + \cancel{\varepsilon^2 f'(x) g'(x)} - \cancel{f(x) g(x)} \right]$$

$$= f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

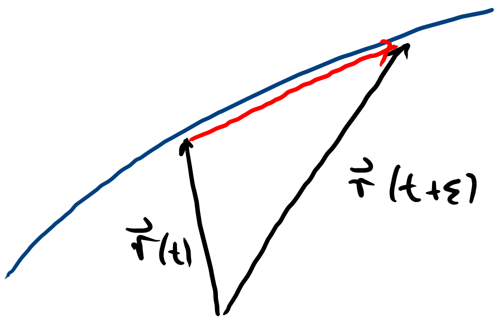
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \qquad (2.9) \qquad (f^2)' = 2 f \cdot f'$$

Differenzieren einer Vektorfunktion

$$\vec{k}(t) \doteq (k_1(t), k_2(t), k_3(t))$$

$$\partial_t \vec{k}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\vec{k}(t+\varepsilon) - \vec{k}(t)}{\varepsilon} = \frac{d\vec{k}}{dt}(t) = \dot{\vec{k}}(t) \doteq (\dot{k}_1(t), \dot{k}_2(t), \dot{k}_3(t))$$

$$\doteq \vec{e}_i \, \dot{k}_i(t)$$



für $\vec h = \vec r$:

Geschwindigkeit $\vec v(t) = \dot{\vec r}(t) \doteq (\dot x, \dot y, \dot z)(t)$ (2.4')

Beschleunigung $\vec a(t) = \dot{\vec v}(t) = \ddot{\vec r}(t)$
$\doteq (\ddot x, \ddot y, \ddot z)(t)$ (2.10)

Rechenregeln:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_t(\vec a + \vec b) = \dot{\vec a} + \dot{\vec b}, \quad && \partial_t(\vec a \cdot \vec b) = \dot{\vec a}\cdot\vec b + \vec a \cdot \dot{\vec b} \\ &\partial_t(\lambda \vec a) = \dot\lambda \vec a + \lambda \dot{\vec a}, \quad && \partial_t(\vec a \times \vec b) = \dot{\vec a}\times\vec b + \vec a \times \dot{\vec b} \end{aligned}\right\} \quad (2.11)$$

Tricks:

- $\vec a \cdot \vec b = \text{konstant} \overset{(2.9)}{\curvearrowright} \left.\begin{aligned}\partial_t(\vec a \cdot \vec b) &= \partial_t \,\text{konst.} = 0 \\ &\Vert \\ \dot{\vec a}\cdot\vec b &+ \vec a \cdot \dot{\vec b}\end{aligned}\right\} \to \dot{\vec a}\cdot\vec b = -\vec a \cdot \dot{\vec b}$

  z.B. $\vec a = \vec b = \vec e$, $\vec e^{\,2} = 1 \curvearrowright \vec e \cdot \dot{\vec e} = 0 \qquad \dot{\vec e} \perp \vec e$

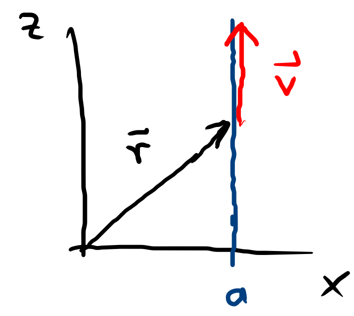
- $\vec a \cdot \dot{\vec a} = \frac{1}{2}\partial_t(\vec a \cdot \vec a) = \frac{1}{2}\partial_t a^2 = a \cdot \dot a \curvearrowright \dot a = \dfrac{\vec a \cdot \dot{\vec a}}{a}$

Anwendung: nehme $\vec r$ für $\vec a$

$$\curvearrowright \dot r = \frac{\dot{\vec r}\cdot\vec r}{r} = \dot{\vec r}\cdot\vec e_r = \vec v \cdot \vec e_r = v_\parallel \neq v \;\left(=\sqrt{v_\parallel^2 + v_\perp^2}\right) = |\dot{\vec r}|$$

Beispiele:

- geradlinige Bewegung nach oben



$$\vec{r}(t) \doteq (a, v_0 t) \qquad r = \sqrt{a^2 + v_0^2 t^2}$$
$$\dot{\vec{r}}(t) \doteq (0, v_0) \qquad v = v_0 \neq \dot{r} = \frac{v_0^2 t}{\sqrt{a^2+v_0^2 t^2}}$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) \doteq (0, 0) \qquad a = 0$$

- Kreisbewegung $\qquad c := \cos\omega t, \quad s := \sin\omega t$

$$\vec{r}(t) \doteq R\,(c, s) \qquad r = R \qquad \dot{r} = 0$$
$$\dot{\vec{r}}(t) \doteq R\omega\,(-s, c) \qquad v = R\omega \not\leftarrow \dot{v} = 0$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) \doteq R\omega^2\,(-c, -s) \doteq -\omega^2\,\vec{r}(t) \qquad a = R\omega^2 \qquad \dot{a} = 0$$

- begleitende Dreibein einer Raumkurve $\vec{r}(t)$

$\vec{t} = \dot{\vec{r}}/v$ Tangenten-Einheitsvektor (2.12) $|\vec{t}\,| = 1$

$\dot{\vec{t}} = \dot{\vec{r}} \times (\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})/v^3 = v\,\kappa\,\vec{n}$ (2.13) $\vec{n}$ = Normale, $|\vec{n}| = 1$

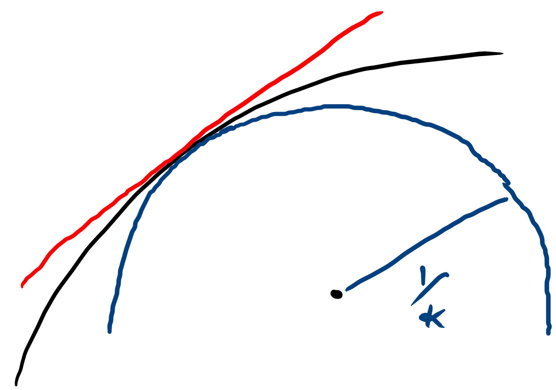
$\dot{\vec{n}} = -v\,\kappa\,\vec{t} + v\,\tau\,\vec{b}$ (2.14) $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$ = Binormale, $|\vec{b}| = 1$

$\dot{\vec{b}} = -v\,\tau\,\vec{n}$

$$\kappa = |\ddot{\vec{r}}_\perp| / v^2 \qquad \text{Krümmung} \qquad 1/\kappa = \text{Krümmungsradius}$$

$$= \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{v^3} \qquad (2.15)$$

$$\tau = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} \qquad \text{Torsion}$$



Frénet-Formel:

$$\partial_t \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = -v \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

(2.16)

II.3 Kettenregel und Gradient

sei $h(x) := f(g(x)) = f(y)$ mit $y = g(x)$

$h = f \circ g \qquad x \xmapsto{g} y = g(x) \xmapsto{f} f(y) = f(g(x)) = h(x)$

differenziere:

$$(\partial_x h)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[h(x+\varepsilon) - h(x)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(g(x+\varepsilon)) - f(g(x))\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(g(x) + \overbrace{\varepsilon g'(x)}^{\delta}) - f(g(x))\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(y+\delta) - f(y)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\cancel{f(y)} + \delta \cdot f'(y) - \cancel{f(y)}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\cancel{\varepsilon}}\left[\overbrace{\cancel{\varepsilon} \cdot g'(x)}^{\delta} \cdot f'(g(x))\right]$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x) = (\partial_y f)(g(x)) \cdot (\partial_x g)(x) \qquad (2.17a)$$

anders: $$\frac{dh}{dx} = \frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \qquad (2.17b)$$

Vorsicht: $f(g(x))' = f'(g(x)) = f'(y)$ falsch!

Funktionen mehrerer Variablen

$f(x,y,z)$ $\qquad (\partial_x f)(x,y,z) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(x+\varepsilon,y,z) - f(x,y,z)\right]$

partielle Ableitung (nach x) $\qquad$ entsprechend ∂_y, ∂_z

Verkettung $\quad x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \rightsquigarrow f(\vec{r}(t)) =: h(t)$

Ableitung:

$$\partial_t h(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[f(x(t+\varepsilon),y(t+\varepsilon),z(t+\varepsilon)) - f(x(t),y(t),z(t))\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[f(x(t)+\varepsilon\cdot\dot{x}(t),\ y(t)+\varepsilon\cdot\dot{y}(t),\ z(t)+\varepsilon\cdot\dot{z}(t)) - f(x(t),y(t),z(t))$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\Big[-f(x,y+\varepsilon\dot{y},z+\varepsilon\dot{z}) + f(x,y+\varepsilon\dot{y},z+\varepsilon\dot{z}) - f(x,y,z+\varepsilon\dot{z}) + f(x,y,z+\varepsilon\dot{z})\Big]\Big]$$

$f(x+\varepsilon\dot{x}) - f(x) = \varepsilon f'(x)\cdot\dot{x}$

$$= (\partial_x f)(x,y,z)\cdot\dot{x} + (\partial_y f)(x,y,z)\cdot\dot{y} + (\partial_z f)(x,y,z)\cdot\dot{z}$$

also:

$$\partial_t f(\vec r(t)) = \dot x(t)\, \partial_x f(\vec r(t)) + \dot y(t)\, \partial_y f(\vec r(t)) + \dot z(t)\, \partial_z f(\vec r(t))$$

$$\doteq \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} (\vec r(t)) \doteq \dot{\vec r} \cdot \underbrace{\vec\nabla}_{\text{„Nabla"}} f(\vec r, t) \qquad (2.18)$$

Gradient einer Funktion

$$\vec\nabla f(x,y,z) \doteq \left(\partial_x f(x,y,z),\ \partial_y f(x,y,z),\ \partial_z f(x,y,z) \right)$$

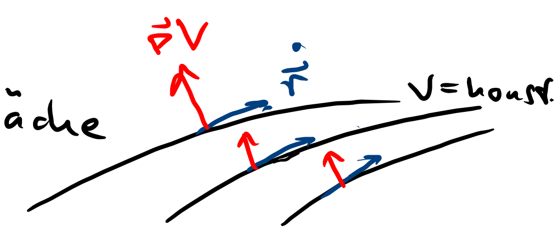
anschaulich:

gegeben Potenzial $V(\vec r)$

Äquipotenzialfläche $V(\vec r) = \text{konstant} \rightarrow \vec r \in$ Ä-Fläche

Trick: betrachte Kurve $\vec r(t)$ in der Ä-Fläche

es gilt: $0 = \partial_t V(\vec r(t)) = \underbrace{\dot{\vec r}(t)}_{\text{tangential an Ä-Fläche}} \cdot \underbrace{\vec\nabla V(\vec r(t))}_{\perp \text{ Ä-Fläche}}$



$\Rightarrow \vec\nabla V \perp$ Ä-Fläche